

عمدييات حول الدوال العروية

أنشطة

أنشطة تذكيرة

نشاط 1

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي في الحالات التالية:

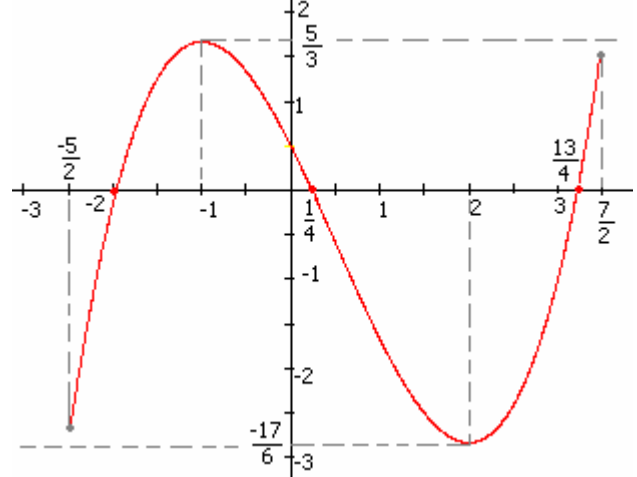
$$f(x) = \sqrt{1-2x} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{-2x+3}{x^2-x+2} \quad \text{أ}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{2x-1} \quad \text{ج}$$

نشاط 2

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$ و (C)

منحناها كما في الشكل التالي:



1- حدد القيمة القصوى و القيمة الدنيا لدالة f على

$$\text{المجال } \left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$$

2- استنتج أن $\forall x \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right] \quad -\frac{17}{6} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$

3- حل ميانيا أ- $f(x) = 0$ ب- $f(x) \geq 0$

4- حدد ميانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

نشاط 3

I/ لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي معرفة بـ

$$f(x) = x^2 - 2x$$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- تأكد أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x-1)^2 - 1$

أ/ بين أن المنحنى C_f صورة المنحنى (C) الممثل

للدالة المعرفة بـ $x \rightarrow x^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1; -1)$

ب/ حدد طبيعة C_f و أنشئه

II/ لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي معرفتين بـ

$$g(x) = x|x| - 2x$$

1- بين أن f دالة فردية

2- حدد جدول تغيرات الدالة f

3- أنشئ C_g في المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نشاط 4

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي معرفتين بـ

$$f(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن $f(x) = -2 + \frac{-3}{x-1}$ لكل x من D_f

2- أ- بين أن C_f صورة المنحنى (C) الممثل للدالة

المعرفة بـ $x \rightarrow \frac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1; -2)$

ب- أنشئ C_f

3- نعتبر g الدالة المعرفة بـ $g(x) = \frac{-2|x|-1}{|x|-1}$

أ- حدد D_g و أدرس زوجية g

ب- أنشئ C_g

نشاط 5

لتكن f و g دالتين عدديتين للمتغير الحقيقي معرفتين بـ

$$g(x) = \frac{-2x+1}{x+1} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد طبيعة C_f و C_g مع إعطاء عناصرها

المميزة

أنشطة التقديم

نشاط 6 (دالة مكبورة- دالة مصغورة - دالة محدودة)

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي معرفة بـ

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

1- بين بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 2$

2- أ/ بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq f(x)$

ب/ حل المعادلة $f(x) = 1$ $x \in \mathbb{R}$

3- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq f(x) < 2$

نشاط 7 (مقارنة دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

$$g(x) = \frac{-x+3}{x+2} ; f(x) = x^2 - 3x$$

المعرفتين بـ C_g و C_f المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- حدد تقاطع C_g و C_f .

2- أنشئ C_g و C_f .

3- حل ميانيا المتراجحة $f(x) \geq g(x)$

4- تحقق جبريا من حلول المتراجحة $f(x) \geq g(x)$

نشاط 8 (الدالة الدورية)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

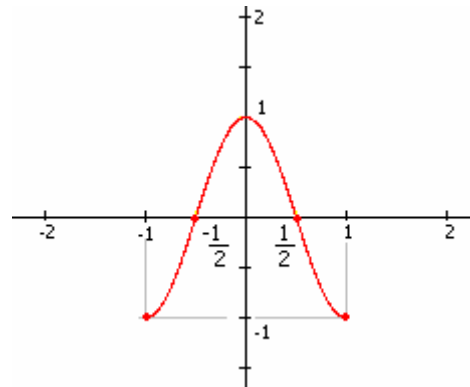
$$f(x) = \cos(\pi x)$$

1- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} f(x+2) = f(x)$

2- أنشئ جزء المنحنى الدالة f على المجال

$[-6; 6]$ علما أن جزء المنحنى الدالة f

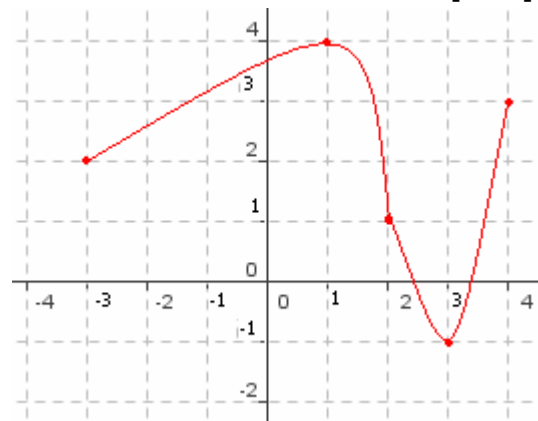
على المجال $[-1; 1]$ كما يلي



نشاط 9 (صورة مجال)

الشكل التالي يمثل دالة عددية معرفة على المجال

$[-3; 4]$



1- / بين أن $\forall x \in [-3; 2] 1 \leq f(x) \leq 4$

ب/ ليكن $y \in [1; 4]$

بين أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا في $[-3; 2]$

ج/ استنتج أن $f([-3; 2]) = [1; 4]$

2- حدد ميانيا صورة المجال $[-3; 1]$ ثم $[2; 4]$

نشاط 10 (مركب دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

$$g(x) = -x+2 ; f(x) = \sqrt{x}$$

1- أحسب $g(3)$ و $g(6)$ و $g\left(\frac{7}{4}\right)$ ثم أحسب

$$f\left(g\left(\frac{7}{4}\right)\right) \text{ و } f(g(6)) \text{ و } f(g(3))$$

2- حدد مجال I بحيث لكل x من I يمكن

حساب $f(g(x))$ حدد $f(g(x))$ لكل x من I

نشاط 11 (التمثيل المبياني لدالة $x \rightarrow \sqrt{x+a}$)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

$$g(x) = \sqrt{x+1} ; f(x) = \sqrt{x}$$

1- حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2- أدرس تغيرات كل من f و g

3- أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$						

ب/ مستعينا بالجدول أنشئ (C_f)

4- / بين أن المنحنى (C_g) صورة المنحنى (C_f)

بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2; 0)$

ب/ أنشئ (C_g)

نشاط 12 (التمثيل المبياني لدالة $x \rightarrow ax^3$)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$$f(x) = 2x^3$$

1- بين أن f فردية

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f

3- أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$						

ب/ أنشئ (C_f)

بالإتباع نفس الخطوات مثل ميانيا

الدالة $g(x) = -x^3$

عمدييات حول الدوال العروية

I - تذكير

1/A - الدالة الزوجية - الدالة الفردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

* نقول ان f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{لكل } x \text{ من } D_f$$

* نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{لكل } x \text{ من } D_f$$

ب- التأويل الهندسي

خاصة

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

* تكون f دالة زوجية إذا فقط إذا كان محور الأرتاب محور تماثل للمنحنى C_f

* تكون f دالة فردية إذا فقط إذا كان المنحنى C_f متماثلاً بالنسبة لأصل المعلم

2- تغيرات دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \leq f(x_2)$

- تكون f تزايدية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$

$$\text{فان } f(x_1) < f(x_2)$$

- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \geq f(x_2)$

- تكون f تناقصية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$

$$\text{فان } f(x_1) > f(x_2)$$

ب- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين D_f

$$\text{العدد } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ يسمى معدل تغير الدالة } f \text{ بين } x_1 \text{ و } x_2.$$

ب- معدل التغير و الرتبة

خاصة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f و $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ معدل تغير الدالة f

بين x_1 و x_2 .

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \geq 0$

- تكون f تزايدية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T > 0$

- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \leq 0$

- تكون f تناقصية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T < 0$

ج- الرتبة و زوجية دالة

خاصة

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل J بالنسبة لـ 0 ($J = \{-x / x \in I\}$)

- إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على J .

- إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على J .

خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل J بالنسبة لـ 0 ($J = \{-x / x \in I\}$)
 - إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على J .
 - إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على J .

ملاحظة: لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

3- مطايف دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال I و a عنصر من I
 - نقول إن $f(a)$ هو القيمة القصوى لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in I$ نكتب $f(a) = \text{Max}_{x \in D_f} f(x)$
 - نقول إن $f(a)$ هو القيمة الدنيا لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in I$ نكتب $f(a) = \text{Min}_{x \in D_f} f(x)$

ب- خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a < b < c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي
 إذا كانت f تزايدية على $[a; b]$ و تناقصية على $[b; c]$ فإن f تقبل قيمة قصوى عند b
 إذا كانت f تناقصية على $[a; b]$ و تزايدية على $[b; c]$ فإن f تقبل قيمة دنيا عند b

B / - دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1- الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

خاصات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$
 * يوجد عدنان حقيقيان α و β حيث $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ لكل x من \mathbb{R} هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

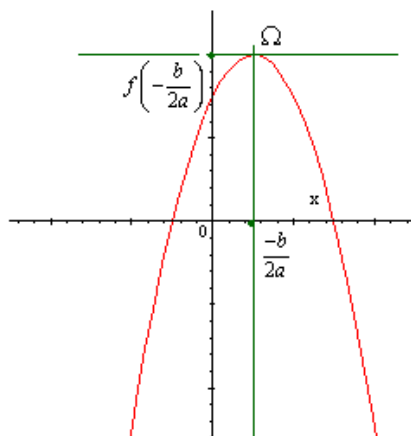
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة ax^2 بالإزاحة ذا المتجهة $\bar{u}(\alpha; \beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha; \beta)$ و محور تماثله المستقيم $x = \alpha$

ملاحظة: $\alpha = -\frac{b}{2a}$ و $\beta = f(\alpha)$

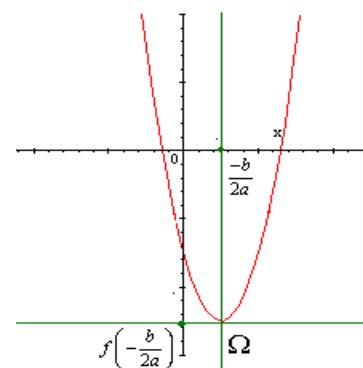
* إذا كان $a < 0$ فإن:

x	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$
f			



* إذا كان $a > 0$ فإن:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			



2- الدالة المتخاطة

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ حيث $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x) = \beta + \frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\bar{u}(\alpha; \beta)$

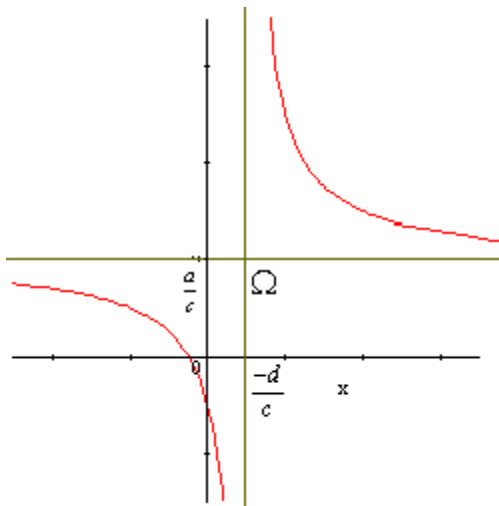
* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هذلول مركزه $\Omega(\alpha; \beta)$ و مقارباها هما المستقيمان المعروفان بـ

$$x = \alpha \quad \text{و} \quad y = \beta$$

$$\alpha = \frac{-d}{c} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{a}{c} \quad \text{ملاحظة:}$$

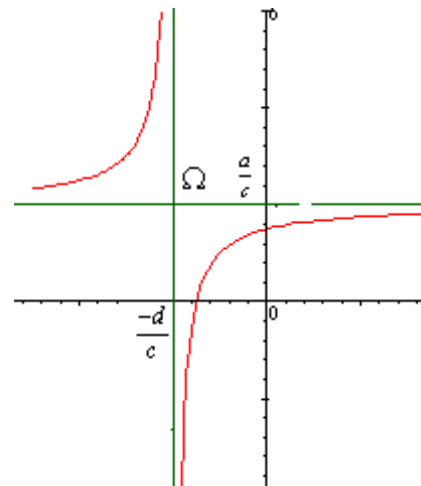
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f			



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f			



II- الدالة المكبورة - الدالة المصغورة - الدالة المحدودة

1/ نشاط

2/ تعاريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I

*- نقول إن f مكبورة على I اذا وجد عدد حقيقي M حيث: $f(x) \leq M$ لكل x من I

*- نقول إن f مصغورة على I اذا وجد عدد حقيقي m حيث: $f(x) \geq m$ لكل x من I

*- نقول إن f محدودة على I اذا وجد عددين M و m حيث: $m \leq f(x) \leq M$ لكل x من I

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I

نقول إن f محدودة على I اذا وجد عدد حقيقي موجب s حيث: $|f(x)| \leq s$ لكل x من I

تمرين

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$

1- حدد D_f

2- بين أن الدالة مكبورة على $[2, +\infty[$ بالعدد 2 و مصغرة على $[2, +\infty[$ بالعدد 1

III- مقارنة دالتين- التأويل الهندسي

1/ نشاط 7

2/ أ/ تساوي دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين عدديتين و D_g و D_f مجموعتي تعريفهما على التوالي
نقول إن f تساوي g و نكتب $f = g$ إذا و فقط إذا كان: $D_g = D_f$ * و $f(x) = g(x)$ * مهما كانت x من D_f

ب/ مقارنة دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين معرفتين مجال I
نقول إن f أصغر أو تساوي g على I إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ مهما كانت x من I نكتب $f \leq g$ على I

ج/ التأويل الهندسي

$f \leq g$ على I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f تحت منحنى g على I

د/ الدالة الموجبة- الدالة السالبة

نعتبر f دالة معرفة على مجال I

* f دالة موجبة على $I \Leftrightarrow (\forall x \in I ; f(x) \geq 0)$

* f دالة سالبة على $I \Leftrightarrow (\forall x \in I ; f(x) \leq 0)$

IV- الدالة الدورية

1- نشاط 8

2- تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث
 $\forall x \in D_f \quad x + T \in D_f ; \quad x - T \in D_f \quad f(x + T) = f(x)$
العدد T يسمى دور لدالة f . اصغر دور موجب قطعاً يسمى دور الدالة

أمثلة

* الدالتان $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \sin x$ دوريتان و دورهما 2π * الدالة $x \rightarrow \tan x$ دورية دورها π

* الدالتان $x \rightarrow \cos ax$ و $x \rightarrow \sin ax$ (حيث $a \neq 0$) دوريتان و دورهما $\frac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x \rightarrow \tan ax$ (حيث $a \neq 0$) دورية دورها $\frac{\pi}{|a|}$

3- خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $f(x + nT) = f(x) \quad \forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z}$

4- ملحوظة

إذا كانت f دالة دورية و T دوراً لها فانه:

- يكفي دراسة الدالة f على $D_f \cap [0, T[$ أو $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$
- يستنتج جزء منحنى الدالة f على $D_f \cap \left[-\frac{T}{2} + nT; \frac{-T}{2} + (n+1)T\right[$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ من جزء منحنى

على $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(nT; 0)$ حيث n عدد صحيح نسبي.

V- صورة مجال بدالة

1- نشاط 9

2- تعريف

لتكن f دالة عددية للمتغير حقيقي و I مجال ضمن من D_f
صورة المجال I بالدالة f هي مجموعة جميع صور عناصر I بالدالة f نرسم له $f(I)$
 $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

ملحوظة:

$$y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I / f(x) = y \quad *$$

* f دالة عددية و I مجال ضمن من D_f J مجال ضمن \mathbb{R}

$$f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I \quad \exists y \in J / f(x) = y$$

$$J \subset f(I) \Leftrightarrow \forall y \in J \quad \exists x \in I / f(x) = y$$

VI- مركب دالتين

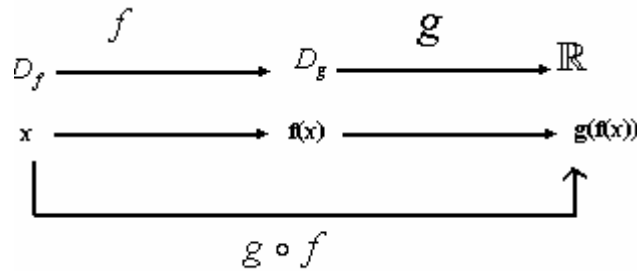
1- نشاط 10

2- تعريف

لتكن f و g دالتين حيث $f(D_f) \subset D_g$

مركبة الدالتين f و g في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ حيث لكل $x \in D_f$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



مجموعة تعريف $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

تمرين

لتكن $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = x^2 + x$

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما

ملاحظة: على العموم $g \circ f \neq f \circ g$

$$h(x) = \frac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$$

تمرين $g(x) = 2x - 1$; $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

1- حدد $h \circ g$; $g \circ f$; $f \circ g$

2- حدد دالة t حيث $h = t \circ g$

3- حدد دالة l حيث $f = l \circ g$

3- مركب دالتين و الرتبة

لتكن f و g دالتين و I و J مجالين ضمن D_f و D_g على التوالي حيث $f(I) \subset J$

- إذا كان f تزايدية على I و g تزايدية على J فإن $g \circ f$ تزايدية على I

- إذا كان f تناقصية على I و g تناقصية على J فإن $g \circ f$ تزايدية على I

- إذا كان f تزايدية على I و g تناقصية على J فإن $g \circ f$ تناقصية على I

- إذا كان f تناقصية على I و g تزايدية على J فإن $g \circ f$ تناقصية على I

تمرين

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = x^2 + 1 ; f(x) = 3x - 1$$

باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات $f \circ g$ و $g \circ f$

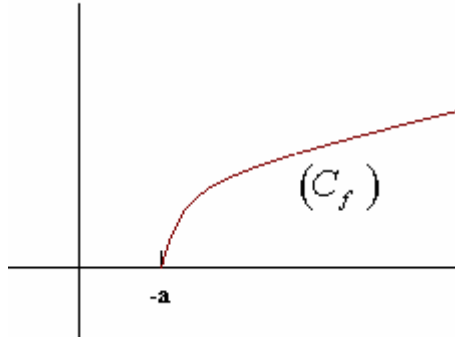
VI- تمثيل الدالتين $x \rightarrow ax^3$ و $x \rightarrow \sqrt{x+a}$

1- الدالة $x \rightarrow \sqrt{x+a}$

نشاط 11

خاصية

الدالة $f : x \rightarrow \sqrt{x+a}$ معرفة و تزايدية قطعاً على $[-a; +\infty[$



أمثلة : في نفس المعلم أنشئ C_f من أجل $a = 0$ و $a = 2$ و $a = -1$

تمرين

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{-x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات f و أنشئ (C_f)

2- حدد D_g ثم حدد تغيرات الدالة g باستعمال مركب دالتين

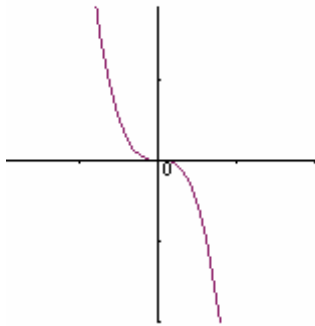
2- الدالة $x \rightarrow ax^3$

نشاط 12

خاصة

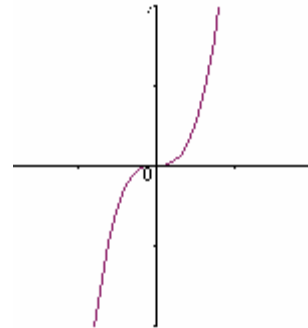
لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = ax^3$ و $a \in \mathbb{R}^*$

*- إذا كان $a < 0$ فإن f تناقصية قطعاً على \mathbb{R}



*- $a < 0$

*- إذا كان $a > 0$ فإن f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}



*- $a > 0$